Métodos de integración:

1) Método de descomposición

Para calcular una integral indefinida, usamos las propiedades de las integrales y las igualdades que conozcamos para descomponer la integral en otras más sencillas, que sean inmediatas.

Por ejemplo: 4) $\int \left(\frac{7}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx$

5) $\int \text{tag } x \, dx$

6) $\int \text{cotag } x \, dx$

7) $\int 5\sqrt[3]{x^2}\, dx =$

ene 5-12:59

Métodos de integración:

2) Método de sustitución o de cambio de variable

Está basado en la regla de la cadena.

Si F(x) y g(x) son funciones derivables, la regla de la cadena nos dice que:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x)$$

Es decir, $(F \circ g)(x)$ es una primitiva de $F'(g(x))\cdot g'(x)$

con lo que podemos escribir:

$$\int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = (F \circ g)(x) + k = F(g(x)) + K$$

Para aplicar el método de cambio de variable o sustitución:

1.- Encontrar en la función a integrar una expresión g(x), cuya diferencial, $g'(x)\cdot dx$, también aparezca como un factor en dicha expresión a integrar. (Salvo constante que multiplique)

2.- Sustituir g(x) por t; $g(x) = t$.

3.- Diferenciar la anterior igualdad: $g'(x)\cdot dx = dt$.

4.- Sustituir en la integral.

5.- Obtener una primitiva como función de t.

6.- Deshacer el cambio de variable.

ene 5-15:33

Algunos cambios de variable interesantes.

1) Si la integral contiene una raíz (por ejemplo cuadrada), podemos llamar al radicando "t" o "t^2".

aunque, a veces, podemos considerar los siguientes cambios:

2) Si la integral contiene $\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} =$$

llamamos $\frac{x}{a} = \operatorname{sen} t$ y queda:

$$= a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = a \cos t$$

3) Si la integral contiene $\sqrt{x^2 - a^2}$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} =$$

llamamos $\frac{x}{a} = \sec t$ y queda:

$$= a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\sqrt{\operatorname{tag}^2 t} = a \operatorname{tag} t$$

4) Si la integral contiene $\sqrt{x^2 + a^2}$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)} = a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} =$$

llamamos $\frac{x}{a} = \operatorname{tag} t$ y queda:

$$= a\sqrt{\operatorname{tag}^2 t + 1} = a \sec t$$

5) Integrales del tipo:

$$\int \frac{u'(x)}{a + u^2(x)}\,dx$$ podemos conseguir una arcotangente

6) Integrales del tipo:

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a - u^2(x)}}\,dx$$ podemos conseguir un arcoseno

ene 5-15:37

3) Integración por partes

Sabemos que: $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$

Si integramos en los dos miembros de esta igualdad, queda:

$$\int d(u\cdot v) = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$$

Como $\int d(u\cdot v) = u\cdot v$ queda: $u\cdot v = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$

y despejando: $\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$

que es la fórmula de la integración por partes.

La dificultad de este método es asignar correctamente el valor a u y a dv.
Como consejo: llamaremos dv a una expresión de la que sea fácil calcular v.

Por ejemplo: $\int x\cdot \cos x\,dx =$

ene 5-15:41

A veces hay que aplicar el método de integración por partes más de una vez.

$$\int x^2 \cos x \, dx \ =$$

En ocasiones, la integral que queremos calcular: I, nos aparece en el segundo miembro con signo -, en este caso:

$$\int e^x \cos x \, dx =$$

Hay que tener en cuenta que funciones como "ln x" o "arctag x", al derivarlas, salen expresiones más sencillas (funciones racionales).

$$\int x \cdot \ln x \, dx$$

ene 5-15:41

4) Integración de funciones racionales

Una función racional es de la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$,

donde P(x) y Q(x) son polinomios.

Si queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ haremos lo siguiente:

A) Si el grado del numerador es mayor ó igual que el grado del denominador, se realiza la división:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x)$$

y quedaría: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)\cdot C(x) + R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

con lo que: $\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx} = \int C(x)\, dx + \boxed{\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx}$

donde grado de R(x) < grado de Q(x)

La integral de C(x) la sabemos hacer porque es un polinomio; nos queda calcular:

$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ donde grado de R(x) < grado de Q(x)

Para hacer esta integral observamos si el numerador es la derivada del denominador (salvo constante que multiplique), si fuera así, la integral estaría hecha porque sería un logaritmo neperiano.

ene 5-15:43

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$ donde grado de R(x) < grado de Q(x)

En otros casos:

C) Se calculan las raíces de Q(x), resolviendo la ecuación Q(x) = 0

Y podemos tener varias situaciones:

1º) Que las raíces sean reales y simples: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$

En este caso la fracción que queremos integrar: $\frac{R(x)}{Q(x)}$

(donde grado R(x) < grado Q(x))

la descomponemos en suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots$$

emos que calcular A, B, C, ... , para eso, hacemos la suma de
cciones. Y cuando los denominadores sean idénticos, identificamos
numeradores. En esta última identidad damos a la x los valores a,
c, ... y obtenemos A, B, C, ...

Y la integral quedaría:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \int \frac{C}{x-c}\,dx + \cdots$$

mos descompuesto la integral en suma de integrales que son
as logaritmos neperianos.

ene 5-15:43

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$ donde grado de R(x) < grado de Q(x)

2º) Que las raíces sean reales y múltiples: a, b, b, b, ...

En este caso la fracción a integrar se descompone de la forma:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)^3} + \cdots$$

Para calcular los coeficientes A, B, C, D, ..., razonamos igual que en el caso anterior, pero dando a la "x" los valores a, b, y los que creamos convenientes hasta poder calcularlos todos.

Y la integral quedaría:

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \int \frac{C}{(x-b)^2}\,dx + \int \frac{D}{(x-b)^3}\,dx + \ldots$$

hemos descompuesto la integral en suma de integrales que son logaritmos neperianos o potencias de exponentes negativos (haciendo el cambio x - b = t)

ene 5-15:44

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$ donde grado de R(x) < grado de Q(x)

3º) Que las raíces sean complejas conjugadas.

En este caso las dejamos agrupadas en un polinomio de segundo grado.

Y descomponemos la fracción a integrar de la forma:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{M\cdot x + N}{ax^2 + bx + c} + \ldots$$

Calculamos los valores M y N, razonando como en los casos anteriores y la integral que tenemos que hacer será:

$$\int \frac{M\cdot x + N}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

que, en general, es un logaritmo neperiano y una arcotangente.

Multiplicando numerador y denominador por una constante y sumando y restando en el numerador otra constante conveniente, conseguimos el logaritmo neperiano en un sumando y en el otro:

Descomponemos el denominador de la forma: $(x + d)^2 + k$, sacamos factor común k y hacemos un cambio de variable.

ene 5-15:44

Integración de algunas funciones trigonométricas:

1.- Si tenemos productos y cocientes de senos y cosenos de x, podemos intentar dejar sólo potencias de una de ellas, multiplicadas por la otra con exponente uno, usando la fórmula fundamental de la trigonometría.

Y luego hacer un cambio de variable, obteniendo una polinómica o racional.

Por ejemplo:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\mathrm{sen}^3 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{sen}^3 x\,dx$

El problema surge si los exponentes del seno y del coseno son los dos pares. En este caso podemos utilizar las fórmulas:

$$\boxed{\mathrm{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}} \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

Demostración:

ene 5-15:44

2.- Hay un cambio con el que salen muchas de ellas:

$$\boxed{\operatorname{tag} \frac{x}{2} = t}$$

en este caso:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctag} t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 2 \operatorname{arctag} t}$$

diferenciando: $dx = 2 \dfrac{1}{1+t^2} dt = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \Longrightarrow \boxed{dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}}$

por otra parte, sabemos que:

$$\operatorname{tag} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \Longrightarrow \quad t^2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

y despejando cos x, nos queda:

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

y usando la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

ene 5-15:46