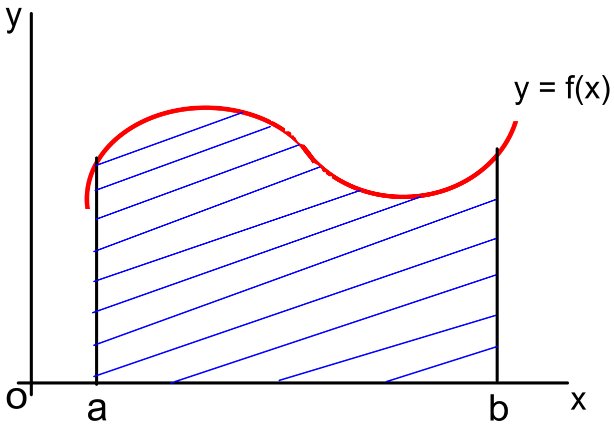
INTEGRAL DEFINIDA

Consideremos la función y = f(x) definida en un intervalo cerrado [a, b], continua y no negativa en [a, b].

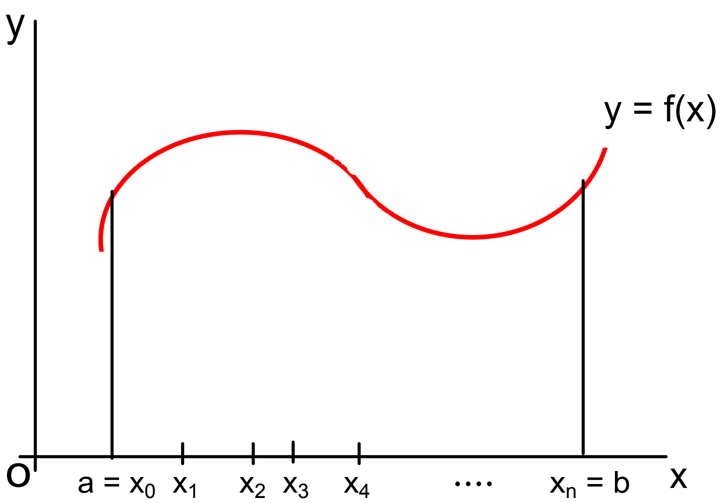
Vamos a tratar de calcular el área limitada por la función, el eje OX y las rectas x = a y x = b



o sea, el área rayada.

Para ello, dividimos el intervalo [a, b] en "n" partes o subintervalos, no necesariamente iguales:

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad ..... , \quad x_n = b$$



Esos sub-intervalos serán: $I_1= [x_o, x_1]$, $I_2= [x_1, x_2]$, $I_3= [x_2, x_3]$, ... , $I_n= [x_{n-1}, x_n]$

Como la función es continua en [a, b], también lo será en cada uno de los intervalos I_i y, por lo tanto, f(x) tendrá en cada intervalo un máximo y un mínimo absoluto.

Supongamos que f(x) alcanza los mínimos en

$$x'_1 \in I_1 , x'_2 \in I_2 , x'_3 \in I_3 , \ldots , x'_n \in I_n$$

y sean estos mínimos:

$$f(x'_1) = m_1 , \quad f(x'_2) = m_2 , \quad f(x'_3) = m_3 , \quad \ldots , \quad f(x'_n) = m_n$$

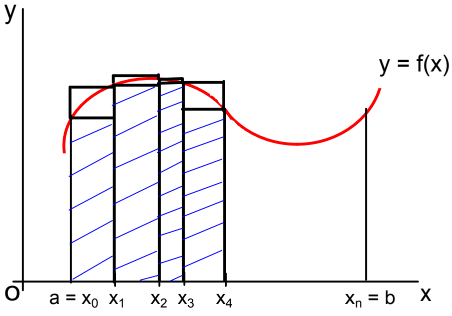
Análogamente los máximos en:

$$x''_1 \in I_1 , x''_2 \in I_2 , x''_3 \in I_3 , \ldots , x''_n \in I_n$$

y sean estos máximos:

$$f(x''_1) = M_1 , \quad f(x''_2) = M_2 , \quad f(x''_3) = M_3 , \quad \ldots , \quad f(x''_n) = M_n$$

formamos rectángulos con base cada intervalo I_i y de altura los mínimos m_i (rectángulos rayados) y los máximos M_i (rectángulos punteados y rayados).



El área de cada rectángulo rayado será: $l_i \, m_i$

$$(x_1 - x_0)\cdot m_1 = l_1\cdot m_1 , \quad (x_2 - x_1)\cdot m_2 = l_2\cdot m_2 , \quad (x_3 - x_2)\cdot m_3 = l_3\cdot m_3 , \quad \ldots , \quad (x_n - x_{n-1})\cdot m_n = l_n\cdot m_n$$

Y toda la zona rayada valdrá: $s = \sum_{i=1}^{n} l_i\cdot m_i$ (suma inferior)

El área de los rectángulos grandes (punteados y rayados) será:

$$(x_1 - x_0)\cdot M_1 = l_1\cdot M_1 , \quad (x_2 - x_1)\cdot M_2 = l_2\cdot M_2 , \quad (x_3 - x_2)\cdot M_3 = l_3\cdot M_3 , \quad \ldots , \quad (x_n - x_{n-1})\cdot M_n = l_n\cdot M_n$$

Y toda la zona punteada y rayada valdrá: $S = \sum_{i=1}^{n} l_i\cdot M_i$ (suma superior)

El área que nosotros queremos calcular: A, está comprendida entre s y S, por lo tanto, podemos expresarlo de la forma:

$$s < A < S$$

Si el número de intervalos lo hacemos cada vez mayor, la diferencia entre s y S se hace cada vez más pequeña y el área que queremos calcular está en un intervalo cada vez menor. Si hago tender a infinito el número de intervalos:

$$\lim_{n\to\infty} s \leq \lim_{n\to\infty} A \leq \lim_{n\to\infty} S$$

los límites valdrán todos iguales y será el área que buscamos:

$$\lim_{n\to\infty} s = A = \lim_{n\to\infty} S$$

La representaremos de la forma:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

y se denominará Integral Definida.

"a" y "b" se llaman límites de integración.

Cuando f(x) es no negativa el área bajo la curva coincide con la integral definida.
Si f(x) es no positiva el área bajo la curva es $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

Si f(x) corta al eje de abscisas en el intervalo [a, b], por ejemplo en c∈[a, b], el área será:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

PROPIEDADES:

1) Si $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

4) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

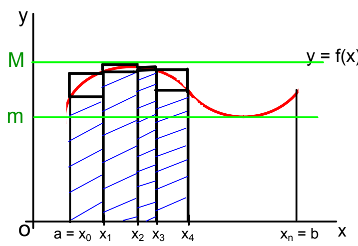
página 604

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si f(x) es continua, positiva e integrable en [a, b] entonces existe un c∈(a, b), tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b - a)$$

Demostración:



Si m y M son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de f(x) en [a, b], se verificará:

$$m\cdot(b - a) \le A = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b - a)$$

De aquí que:

$$m\cdot(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b - a)$$

lógicamente existirá un μ comprendido entre m y M, tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\cdot(b - a)$$

ahora bien, por ser f(x) continua en [a, b], el teorema de Darboux asegura que toma todos los valores entre su máximo y su mínimo, por lo tanto existirá un c∈(a, b) tal que f(c) = μ.

Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b - a) \qquad \text{con } c\in(a, b)$$

c.q.d.

ene 3-12:08

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Sea f(x) integrable en (a, b) y sea F(x) la función definida como:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, si f(x) es continua en $c \in (a, b)$,

entonces F(x) es derivable en c y se verifica que F'(c) = f(c).

Demostración:

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_c^{c+h} f(t)\,dt}{h}$$

Aplicando el teorema anterior, por ser f(x) continua e integrable, $\exists z \in (c, c+h)$ tal que:

$$\int_c^{c+h} f(t)\,dt = (c + h - c)\cdot f(z) = h\cdot f(z)$$

con lo que:

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_c^{c+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} f(z)$$

Si $h \to 0$, z tenderá a c, y lógicamente f(z) tenderá a f(c), por lo que nos queda:

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} f(z) = f(c)$$

c.q.d.

ene 21-18:11

REGLA DE BARROW

Si f(x) es continua en [a, b] y existe una función g(x) tal que g'(x) = f(x) en [a, b], entonces se tiene que:

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$$

Demostración:

g(x) es una primitiva de f(x), pues g'(x) = f(x).

Además, sabemos que si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

o sea, F(x) es otra primitiva de f(x).

Luego: F(x) = g(x) + k

en particular: F(a) = g(a) + k

pero como:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

nos quedará que: $0 = g(a) + k \Rightarrow k = -g(a)$

Por otra parte: F(b) = g(b) + k = g(b) - g(a)

y como: $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

tendremos que: $$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)}$$

c.q.d.

ene 21-18:51

Ejemplos:

a) Calcular el área limitada por $y = 4x - x^2$ y el eje de abscisas.

$\boxed{\frac{32}{3}\ u^2}$

ene 21-19:10

b) Calcular el área limitada por $y = \operatorname{sen} x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2\pi$.

$\boxed{4\ u^2}$

ene 21-19:13

c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = 2 - x^2$ e $y^3 = x^2$

$\boxed{\frac{32}{15}\ u^2}$

ene 21-19:12

d) Calcular el área limitada por $y = \ln x$, $x = e$ y el eje OX.

$\boxed{1\ u^2}$

ene 21-19:16