PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

1.- Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}$ con $a \in$ R, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$

a) Hallar los valores de a para los que r es paralela a π

b) Para $a = 2$, hallar la distancia de r a π.

c) Para $a = 1$, hallar la distancia de r a π

2.- Dados el punto P(1, 1, −1), la recta $r \equiv x = \frac{y+6}{4} = z - 3$ y el plano $\pi \equiv 6x + 6z - 12 = 0$ se pide:

a) Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π.

b) Hallar los puntos Q de r que distan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unidades de longitud de π.

3.- Se consideran las rectas r y s dadas por las ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$,

$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a}$ a) Hallar el valor del parámetro a para que r y s sean perpendiculares.

b) Hallar la recta t paralela a r y que pasa por el punto de s cuya coordenada z es 0.

4.- Dadas las rectas $s \equiv \frac{x-1}{3} = y = \frac{z-1}{2}$ y $t \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$ se pide hallar la perpendicular común a s y a t y la distancia entre ambas rectas.

5.- a) Determinar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades del mismo.

b) Probar que el punto P(1, 1, 2) pertenece a π, y calcular la recta perpendicular a π que pasa por P.

6.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, −1, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$

7.- Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto A(1, 0, −1), es perpendicular al plano $\pi \equiv x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

8.- a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de $A(-2, 1, 6)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$ b) Hallar la distancia de A a r.

9.- a) Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} y - x = 1 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y = 0$.

b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a r.

10.- a) Hallar la recta r que pasa por el punto A(1, −1, 0), está contenida en el plano $\pi \equiv x + y = 0$, y corta a la recta $s \equiv x = y = z$.

b) Hallar la distancia del punto B(2, −2, 2) a la recta s.

11.- Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + (m+1)y + mz = m + 1$. Estudiar la posición relativa de la recta y el plano según los valores de m.

12.- a) Calcular un vector unitario y ortogonal a los vectores v(1, 2, 0) y w(−1, 0, 1)

b) Calcular el plano que contiene a las rectas $r \equiv \begin{cases} y + 1 = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{0} = z - 2$

13.- Se consideran las rectas: $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$ $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$

a) Justificar razonadamente que ambas rectas se cruzan.

b) Hallar la perpendicular común y que corta a las dos rectas.

14.- Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos P(2,1, 3) y Q(1, 3,1); los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto R(−4, 7, −6).
a) Calcular la ecuación de la recta r.
b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.
c) Hallar las coordenadas de uno de los otros vértices.

15.- Dados el punto $A(2, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv x = \frac{y+2}{2} = z-1$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=2 \end{cases}$, se pide:
a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y corta a r y s.
b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

16.- Sea s la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-t \\ z = 1 \end{cases}$ a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto P(1, 0, 5) y corta perpendicularmente a la recta s. b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a s.

17.- Sean los puntos A(1, 2, −1) , P(0, 0, 5), Q(1, 0, 4) y R(0, 1, 6) a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A, es paralela al plano que pasa por los puntos P, Q y R, y tal que la primera componente de su vector director es doble que la segunda.
b) Halla la distancia del punto A al plano que pasa por P, Q y R.

18.- Sean los puntos P(1, 4, –1) y Q(0, 3, –2) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 4 \end{cases}$
a) Hallar la ecuación del plano que pasa por P, por un punto R de la recta r y es perpendicular a la recta que pasa por Q y por R.
b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano $\pi \equiv x - y - 3 = 0$

19.- Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, la recta $r \equiv x = y = z$ y el punto A(3, 2, 1)
a) Hallar la recta que pasa por A , es paralela a π y corta a r.
b) Hallar los puntos de r que equidistan de A y de π.

20.- Sean las rectas $r \equiv x = -y = z - 1$ y $s \equiv x - 2 = y = z - m$
a) Determinar m para que las rectas sean coplanarias.
b) Para m = 2, calcular la distancia entre las rectas

21.- Sea π el plano que pasa por los puntos A(1, –1,1), B(2,3, 2), C(3,1, 0) y r la recta dada por $r \equiv \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$ a) Calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π.
b) Calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π.

22.- Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$, paralela al plano $\pi_2 \equiv x = 0$, y que pasa por el punto simétrico de B(−1,1,1) respecto de π_2