2º BACHILLERATO 21-12-2015

① Determina a, b, c y d de modo que la función $y=ax^3+bx^2+cx+d$ pase por el punto $P(1,0)$, tenga por tangente en el punto de abscisa $x=0$ la recta de ecuación $y=2x+1$ y posea un punto de inflexión en $x=2$.

SOLUCIÓN:

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$y'=3ax^2+2bx+c$$
$$y''=6ax+2b$$

Pasa por $P(1,0)$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$

tangente en $x=0$, $y=2x+1$ $\Big\}\Rightarrow$ $f'(0)=2$, $f(0)=1$ (ya que el punto de tangencia es $x=0$ $y=2\cdot0+1=1$)

Punto de inflexión $x=2 \Rightarrow f''(2)=0$

$\boxed{d=1}$ $\boxed{c=2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \Rightarrow a+b+c+d=0 \\ f'(0)=2 \Rightarrow \quad c=2 \\ f(0)=1 \Rightarrow \quad d=1 \\ f''(2)=0 \Rightarrow 12a+2b=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a+b=-3 \\ 12a+2b=0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} a=\frac{3}{5} \\ b=-\frac{18}{5} \end{array}}$$

② Estudia dominio, cortes con los ejes, paridad, asíntotas, máximos, mínimos, monotonía, puntos de inflexión y curvatura de la función $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ representándola con los resultados obtenidos:

DOMINIO: $x-1=0$ $x=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}}$

CORTES CON EJES: $x=0 \Leftrightarrow y=0$ $\boxed{P(0,0)}$

PARIDAD: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=\dfrac{-x^3}{(x+1)^2}$ $\boxed{\text{No es par, ni impar.}}$

ASÍNTOTAS: HORIZONTALES: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\pm\infty$ No hay

VERTICALES: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$ $\boxed{x=1}$

OBLICUAS: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2$$

$$\boxed{y = x + 2}$$

MÁXIMOS, MÍNIMOS, MONOTONÍA

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \, 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)\, 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$y' = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$

$f''(0) = 0$ posible pto de inflexión

$f''(3) = \frac{18}{2^4} > 0$ Mínimo en $x = 3$ en $\boxed{m\left(3, \frac{27}{4}\right)}$

$(-\infty, 0)$ $f'(-1) = \frac{-1-3}{(-2)^3} > 0$ creciente

$(0, 1)$ $f'(1/2) = \frac{\frac{1}{8} - \frac{3}{4}}{-} > 0$ creciente

$(1, 3)$ decreciente

$(3, +\infty)$ creciente

No hay Máximos.

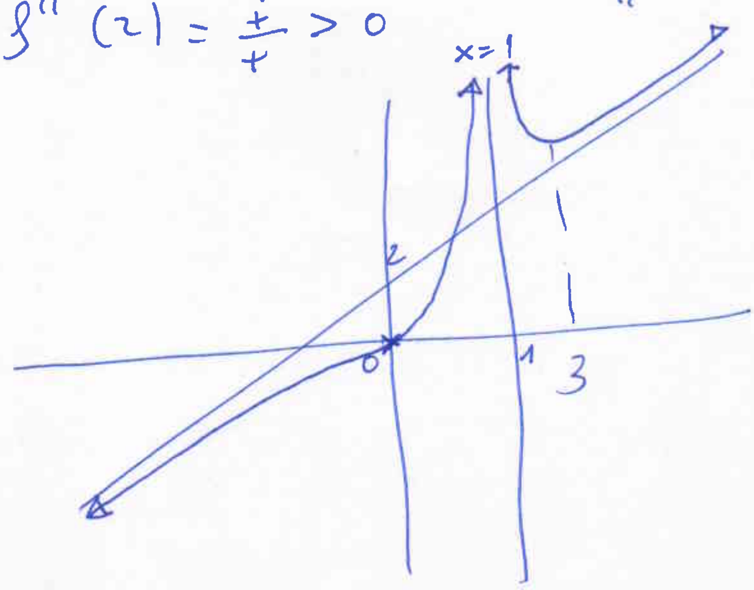
PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CURVATURA

$y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0$ $x = 0$

$(-\infty, 0)$ $f''(-1) = \frac{-6}{+} < 0$ cóncava hacia abajo

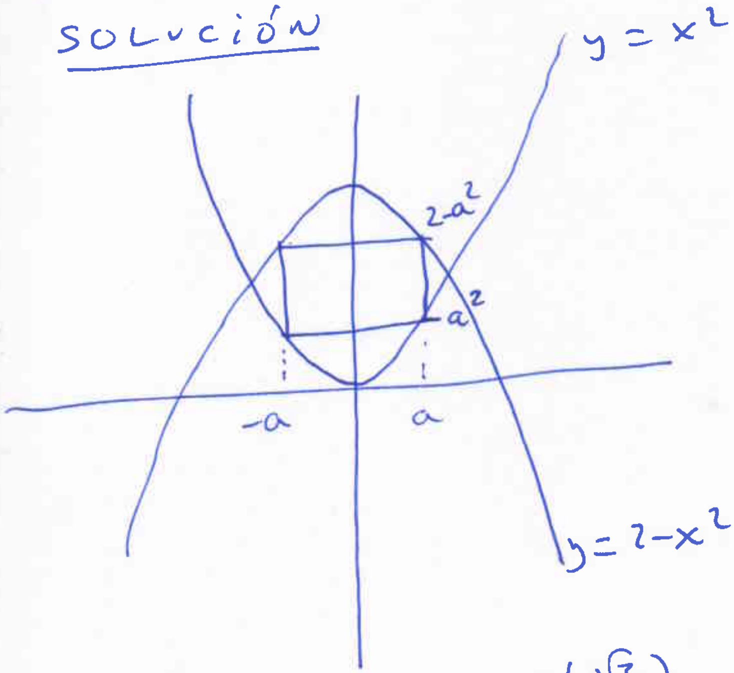
$(0, 1)$ $f''(1/2) = \frac{+}{+} > 0$ cóncava hacia arriba

$(1, +\infty)$ $f''(2) = \frac{+}{+} > 0$ " "



③ Determina los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por los gráficos de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2-x^2$

SOLUCIÓN



Maximizar $S=$ base $\times$ altura $=$

$= 2a.(2-a^2-a^2) =$

$= 2a(2-2a^2) = 4a-4a^3$

$S' = 4-12a^2$

$S'=0 \Rightarrow a^2=\frac{1}{3} \quad a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Máximo en $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$S''=-24a \qquad S''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<0$

Vértices: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3}\right)$