

1. Algebra. Matrices

367. (2003) Calcular el rango de A, según los valores de m: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$
368. (2003) Dadas $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define $C = A + mB$.
- (a) Halla m para que C tenga rango 3
- (b) Para $m = -1$ resolver el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es C.
369. (2003) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde m es un número real. Encontrar los valores de m para los que A.B es inversible.
370. (2003) Si A y B son dos matrices cuadradas que verifican $A.B = B^2$, ¿cuándo se puede asegurar que $A=B$?
371. (2004) Se tiene una matriz M de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1, C_2 , y C_3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son $-C_2, C_3 + C_2$, y $2C_1$. Calcúlese razonadamente el determinante de A^{-1} en el caso de que exista esa matriz.
372. (2004) Dada la matriz $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hállese una matriz X que verifique la ecuación $XB + B = B^{-1}$
373. (2004) Sea A una matriz cuadrada de orden 4 cuyo determinante vale 3, y sea la matriz $B = \sqrt[4]{3}A$. Calcúlese el determinante de la matriz B.
374. (2004) Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz B, sabiendo que $P^{-1}BP = A$
375. (2003) Si A es una matriz cuadrada ¿la matriz $A + A^t$ es igual a su traspuesta?. Razonar la respuesta.
376. (2005) Sea A una matriz 2x2 de columnas C_1 y C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2x2 de determinante 2. Si C es la matriz columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcúlese el determinante de la matriz BC^{-1} .
377. (2005) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hállese las matrices X que satisfacen $XC + A = C + A^2$.
378. (2005) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, calcúlese el determinante de A sabiendo que $A^2 - 2A + I = O$, donde O es la matriz nula.
379. (2005) Discútase, según los valores de a, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$
380. (2005) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinense los valores de m para los cuales $A + mI$ no es invertible.
381. (2006) Sea m un número real. Discútase, en función de m, el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$.
382. (2006) Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, determinense los valores del número real a para los cuales existe la matriz inversa de P.

383. (2006) Hállense las matrices cuadradas A de orden 2, que verifican la igualdad: $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A$.
384. (2006) Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese razonadamente la matriz B sabiendo que $BP = A$.
385. (2007) Hallar para qué valores de a es inversible la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4+3a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y calcular la inversa para $a = 0$.
386. (2007) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
a) Hallar la matriz AB^t donde B^t indica la matriz traspuesta de B . ¿Es inversible? b) Hallar el rango de la matriz $A^t D$. c) Calcular $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifique la ecuación $(AB^t + C)M = E$.
387. (2007) Sean X una matriz 2×2 y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX + B = B^2 + I$, si I es la matriz identidad.
388. (2007) Discutir, en función del número real m , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
389. (2008) Sean las matrices $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz A , sabiendo que $A^2 = B$ y $A^3 = C$.
390. (2008) Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
391. (2008) Sea A una matriz 3×3 de columnas C_1 , C_2 y C_3 (en ese orden). Sea B la matriz de columnas $C_1 + C_2$, $2C_1 + 3C_3$ y C_2 (en ese orden). Calcular el determinante de B en función del de A .
392. (2009) Sea A una matriz cuadrada tal que $\det(A) = -1$ y $\det((-2) \cdot A) = 32$. Calcular el tamaño de la matriz A .
393. (2009) Calcular la matriz X que verifica $AX = BB^t$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, siendo B^t la matriz traspuesta de B .
394. (2009) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix} = 0$.
395. (2009) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} -x & -1 & 2x \\ 2x & -x & -1-x \\ -1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$
396. (2009) Estudiar, en función del parámetro real λ , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$
397. (2010 gen) a) Si se sabe que el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ vale 5, calcular razonadamente $\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ b_1 & 2b_2 & 3b_3 \\ c_1 & 2c_1 & 3c_3 \end{vmatrix}$
y $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_3 & b_2 + b_3 & c_2 + c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ b) Si A es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 para la cual se cumple que $A^{-1} = A^t$ ($A^t =$ traspuesta de la matriz A), ¿puede ser el determinante de A igual a 3?

398. (2010 gen) Sea B una matriz cuadrada de tamaño 3×3 que verifica que $B^2 = 16I$, siendo I la matriz unidad.
- (a) Calcular el determinante de B .
- (b) Hallar todas las matrices X que satisfacen la ecuación $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
399. (2010 esp) Dadas las matrices $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- (a) ¿Para qué valores de m existe B^{-1} ? Para $m = 1$, calcular B^{-1} .
- (b) Para $m = 1$, hallar la matriz X tal que $X \cdot B + C = D$.
400. (2010 esp) a) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$ (siendo I la matriz identidad). Probar que A admite inversa y utilizar la igualdad dada para expresar A^{-1} en función de A . b) Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Hallar razonadamente los valores de m para los que el sistema es compatible determinado.
401. (2010 esp) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- (a) Calcular A^{-1} .
- (b) Resolver la ecuación matricial $AX + 2AB = B$.
402. (2011) a) Calcular el rango de la matriz $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
- b) Si B es una matriz cuadrada de dimensión 3×3 cuyo determinante vale 4, calcula el determinante de $5B$ y el de B^2 .
403. (2011) a) AvSiendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. a) ¿Se cumple la igualdad $\text{rango}(A \cdot B) = \text{rango}(A) \cdot \text{rango}(B)$? Justificar la respuesta. b) Encontrar todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ tales que $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. c) ¿Existe alguna matriz Y , cuadrada de orden 2, tal que $A \cdot Y = B^t$ (B^t es la matriz traspuesta de B). Justificar la respuesta.
404. (selec) Averiguar para qué valores de m la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 0 & m & -2 \end{bmatrix}$ no tiene inversa.
- b) Calcula la matriz inversa de A para $m = 0$.
- c) Sabemos que el determinante de una matriz cuadrada A vale -1 y que el determinante de la matriz $2 \cdot A$ vale -16 ¿Cuál es el orden de la matriz A ?
405. (2012) Sea M una matriz cuadrada que cumple la ecuación $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad.
- (a) Estudiar si existe la matriz inversa de M . En caso afirmativo expresar M^{-1} en términos de M e I .
- (b) Hallar todas las matrices M de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $M^2 - 2M = 3I$.
406. (2012) a) Determinar, en función del valor del parámetro real a , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$
- Sea C una matriz 2×2 de columnas C_1 y C_2 y de determinante 5, y sea B una matriz 2×2 de determinante 2. Si D es la matriz de columnas $4C_2$ y $C_1 - C_2$, calcular el determinante de la matriz BD^{-1} .

407. (2013) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) Calcular M^{-1}
 (b) Calcular la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

408. (2013) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

- (a) ¿Para qué valores de a la matriz A es invertible?
 (b) Estudiar el rango según los valores de a .
 (c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4}A$

409. (2014) a) Resolver la siguiente ecuación matricial $X \cdot A = B - C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. b) Sean F_1 , F_2 , y F_3 las filas de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz cuyas filas son respectivamente $3F_1 - F_3$, F_2 y $2F_3$.

410. (2014) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$

- (a) Discutir su rango en función de los valores de a .
 (b) Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

411. (2015) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (a) Hallar los valores de m para que la matriz A^{10} tenga inversa.
 (b) Para $m=0$, calcular, si es posible, la matriz inversa.

412. (2015) Consideremos la matriz $M = \begin{pmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{pmatrix}$.

- (a) Calcular el rango de M en función del parámetro a .
 (b) Para $a = 1$, resolver la ecuación $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$